Научная статья
УДК 517+515.126.4
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-50-61

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ПАРАМЕТРОВ BOX-КВАЗИМЕТРИКИ КАНОНИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЭНГЕЛЯ

Александр Валерьевич Грешнов[1]
Софья Александровна Грешнова[2]

[1,2]Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

[1,2]a.greshnov@g.nsu.ru;https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

Аннотация

Для *Box*-квазиметрики канонической группы Энгеля, рассматриваемой как симметрическая (q_1, q_2)-квазиметрика, получено описание ее области допустимых параметров q_1, q_2 и найдено в неявной форме минимальной значение константы q в (q, q)-обобщенном неравенстве треугольника.

Ключевые слова и фразы

(q_1, q_2)-квазиметрика, Box-квазиметрика, каноническая группа Энгеля, допустимые параметры.

Источник финансирования

[1,2]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/ НГУ

Для цитирования

Грешнов А. В., Грешнова С. А. Область допустимых параметров Box-квазиметрики канонической группы Энгеля// *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 2, С. 50-61. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-50-61

The domains of admissible parameters of Box-quasimetric of canonical Engel group

Alexander V. Greshnov[1], **Sofiya A. Greshnova**[2],

[1,2]Novosibirsk state university,
Novosibirsk, Russia

[1,2]a.greshnov@g.nsu.ru;https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

Abstract

For Box-quasimetric of the canonical Engel group considered as symmetric (q_1, q_2) quasimetric, the description of the domain of its admissible parameters q_1, q_2 is obtained. The minimum value of the constant q in its (q, q)-generalized triangle inequality is found implicitly.

Keywords

(q_1, q_2)-quasimetric, Box-quasimetric, canonical Engel group, admissible parameters.

Funding

[1,2]The study was completed with a grant from the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/ NSU

For citation

Greshnov A. V., *Greshnova S. A.*, The domains of admissible parameters of Box-quasimetric of canonical Engel group // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N 2, P. 50-61. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-50-61

Введение

Напомним, что (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством [1, 2, 3] называется пара (X, d_X), где X — некоторое множество, состоящее не менее чем из двух элементов, $d_X : X \times X \to R^+ \cup 0$ — некоторая функция, удовлетворяющая аксиоме тождества

$$d_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(в этом случае говорят, что d_X — функция расстояния) и (q_1, q_2)-обобщенному неравенству треугольника, т. е.

$$d_X(x, y) \leq q_1 d_X(x, z) + q_2 d_X(z, y) \quad \forall x, y, z \in X, \quad q_1, q_2 \geq 1.$$

Если $q_1 = q_2 = 1$, тогда (X, d_X) — квазиметрическое пространство [4]. Если для (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, d_X) выполняется условие

$$d_X(x, y) \leq q_0 d_X(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

где константа $q_0 > 0$ не зависит от выбора x, y, то (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d_X) является q_0-симметрическим; в случае $q_0 = 1$ используется понятие симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства. Для (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, d_X) через $Q = Q(X, d_X)$

обозначим множество точек $q = (q_1, q_2)$ евклидовой плоскости Π с координатами (q_1, q_2) таких, что для d_X выполняется (q_1, q_2)-обобщенное неравенство треугольника. Множество $Q = Q(X, d_X)$ назовем множеством допустимых параметров для (q_1, q_2)-квазиметрики d_X. Понятно, что

$$Q(X, d_X) \subseteq K = \{(q_1, q_2) \in \Pi \mid q_1, q_2 \geq 1\}.$$

Элементарные свойства областей допустимых параметров (q_1, q_2) -квазиметрик и примеры читатель может найти в работах [1, 5, 6]. Группы Карно G, снабженные Box-квазиметриками Box_G, являются важными частными случаями симметрических (q_1, q_2)-квазиметрических пространств [1]–[11]. Box-квазиметрики были введены Найджелом, Стейном и Вэйнгером в работе [11] для получения оценок ядер некоторых неэллиптических дифференциальных операторов (типа сублаплпсиана). Box-квазиметрики играют важную роль в геометрическом анализе на пространствах Карно—Каратеодори, см. [6]–[10]. Настоящая работа продолжает исследования областей допустимых параметров для Box-квазиметрик групп Карно, начатые в работе [5]. Отметим, что в работе [5] на первой группе Гейзенберга H^1_α было получено следующее описание области допустимых параметров ее Box-квазиметрики $Box_{H^1_\alpha}$.

Теорема 0.1. *Множество $\partial Q(H^1_\alpha, Box_{H^1_\alpha})$ представляет собой: 1^0 при $\alpha > 2$ объединение дуги ветви параболы $4q_1^2 + 4q_2^2 - 4q_1q_2\alpha + \alpha^2 - 4 = 0$, ограниченной точками $M_{q_1} = (1, \frac{\alpha}{2})$, $M_{q_2} = (\frac{\alpha}{2}, 1)$, и лучей, принадлежащих ∂K, начинающихся в точках M_{q_1}, M_{q_2}, 2^0 при $\alpha \leq 2$ совпадает с ∂K.*

В настоящей работе, используя результаты теоремы 0.1, нами получено описание области допустимых параметров для Box-квазиметрики $Box_{E_{\alpha,\beta}}$ канонической группы Энгеля $E_{\alpha,\beta}$ (свойства 2.2–2.4, теорема 2.5). Однако, в общем случае описание множества допустимых параметров $Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$ не имеет такую же лаконичную наглядную форму, как $Q(H^1_\alpha, Box_{H^1_\alpha})$ (см. свойство 2.2, теорема 2.5). Более того, для упрощения формы записи координат кривой σ, см. (2.10), авторы использовали пакеты вычислительных программ, однако результаты этих применений не дали желаемые упрощения. В теореме 2.6 мы получили минимальное значение константы q для (q, q)-обобщенного неравенства треугольника для Box-квазиметрики $Box_{E_{\alpha,\beta}}$, но в неявном виде — как решение некоторого уравнения третьей степени. Отметим, что для первой группы Гейзенберга минимальное значение константы q для (q, q)-обобщенного неравенства треугольника для Box-квазиметрики $Box_{H^1_\alpha}$ находится явно, и оно равно $\frac{\sqrt{\alpha+1}}{2}$ [5, Следствие 5].

Полученные в результаты работы могут быть применены для получения точных оценок устойчивости липшицевых отображений по отношению к накрывающим отображениям в теоремах о существовании точек совпадения на группах Карно, снабженных Box-квазиметриками, см. [1, 2].

Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и ценные замечания.

§ 1. Каноническая группа Энгеля $E_{\alpha,\beta}$ и ее Box-квазиметрика

Каноническая группа Энгеля $E_{\alpha,\beta}$, см. [10], определяется в стандартном евклидовом пространстве R^4 с системой координат (x, y, t, z), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3, e_4), при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = \beta e_4, & \beta > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

все остальные возможные коммутаторы e_1, e_2, e_3, e_4 равны 0.

Произвольный элемент $u \in E_{\alpha,\beta}$ отождествляется со своей координтной записью, т. е.

$$u = xe_1 + ye_2 + te_3 + ze_4 = (x, y, t, z).$$

Используя формулу Кэмпбелла—Хаусдорфа [12] и таблицу (1.1), мы получаем аналитическое выражение операции левого сдвига $P_w^{E_{\alpha,\beta}} w'$ произвольного элемента $w' = (x', y', t', z') \in E_{\alpha,\beta}$ на произвольный элемент $w = (x, y, t, z) \in E_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned} &P_w^{E_{\alpha,\beta}} w' = w \cdot w' \\ &= \Big(x+x', y+y', t+t'+\frac{\alpha}{2}(xy'-x'y), z+z'+\frac{\beta}{2}(xt'-x't)+\frac{\alpha\beta}{12}(x-x')(xy'-x'y)\Big). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Нейтральный элемент O канонической группы Энгеля совпадает с началом координат евклидова пространства R^4, т. е. $O = (0, 0, 0, 0)$, и для любого элемента $u = (x, y, t, z) \in E_{\alpha,\beta}$ мы имеем $u^{-1} = (-x, -y, -t, -z)$. Однопараметрическая подгруппа растяжений δ_ε, $\varepsilon \geq 0$, действует на элементы $u = (x, y, t, z)$ следующим образом

$$\delta_\varepsilon : (x, y, t, z) \to (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 z).$$

Пусть $u, v \in E_{\alpha,\beta}$, тогда $v = u \cdot (u^{-1} v) = uc$, где

$$c = c(u, v) = (c_1, c_2, c_3, c_4)(u, v). \tag{1.3}$$

Тогда Box-квазирасстояние $Box_{E_{\alpha,\beta}}$ между двумя элементами u, v канонической группы Энгеля $E_{\alpha,\beta}$ определяется как

$$Box_{E_{\alpha,\beta}}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}, |c_4|^{\frac{1}{3}}\}.$$

Из определения вытекает, что $Box_{E_{\alpha,\beta}}$ удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии, а также является инвариантной относительно действия однопараметрической подгруппы растяжений δ_ε и левых сдвигов, т. е.

$$Box_{E_{\alpha,\beta}}(P_w^{E_{\alpha,\beta}} u, P_w^{E_{\alpha,\beta}} v) = Box_{E_{\alpha,\beta}}(u, v) \quad \forall u, v, w \in E_{\alpha,\beta},$$

$$Box_{E_{\alpha,\beta}}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon Box_{E_{\alpha,\beta}}(u, v) \quad \forall u, v \in E_{\alpha,\beta} \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Используя формулу Кэмпбелла—Хаусдорфа [12], несложно убедиться, см., например, [7], в том, что найдутся константы $q_1, q_2 > 0$ такие, что

$$Box_{E_{\alpha,\beta}}(u, w) \leq q_1 Box_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}(u, v) + q_2 Box_{E_{\alpha,\beta}}(v, w) \quad \forall u, v, w \in E_{\alpha,\beta}. \tag{1.4}$$

§ 2. Множество $Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$

Сделаем несколько упрощений, которые помогут для получения описания множества $Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$, см. [5, 10]. Используя инвариантность $Box_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}$ относительно левых сдвигов, мы будем определять область допустимых параметров $Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$, используя вместо (1.4) неравенство

$$Box_{E_{\alpha,\beta}}(O, w) \leq q_1 Box_{E_{\alpha,\beta}}(O, v) + q_2 Box_{E_{\alpha,\beta}}(v, w). \tag{2.1}$$

Пусть $Box_{E_{\alpha,\beta}}(O, v) = Box_{E_{\alpha,\beta}}(O, w') = 1$, $v = (x, y, t, z)$, $w' = (x', y', t', z')$,

$$w = v\delta_\varepsilon w' = (f_0, f_1, f_2, f_3)(v, w', \varepsilon) = \Big(x + \varepsilon x',\ y + \varepsilon y',$$
$$t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(xy' - y'x),\ z + \varepsilon^3 z' + \frac{\beta\varepsilon}{2}(x\varepsilon t' - x't) + \frac{\alpha\beta\varepsilon}{12}(x - x'\varepsilon)(xy' - x'y)\Big), \tag{2.2}$$

тогда неравенство (2.1) записывается как

$$\max\Big\{|f_0|,\ |f_1|,\ |f_2|^{\frac{1}{2}},\ |f_3|^{\frac{1}{3}}\Big\} \leq q_1 + q_2\varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{2.3}$$

Учитывая аксиому симметрии и инвариантность $Box_{E_{\alpha,\beta}}$ относительно действия подгруппы растяжений δ_ε, для получения описания множества

$$Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$$

мы будем использовать неравенство (2.3) вместо неравенства (2.1), см. [5, 10].

Символом Q_i обозначим совокупность точек $M = M(q_1, q_2)$ множества K таких, что для всех $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$|f_i(v, w', \varepsilon)|^{\frac{1}{i}} \leq q_1 + \varepsilon q_2, \quad i = 2, 3,$$

для всех подходящих v, w'. Нетрудно видеть, что множества Q_i являются выпуклыми и замкнутыми. Отметим, что для f_0, f_1 множества Q_i, $i = 0, 1$, точек $M = M(q_1, q_2) \in K$ таких, что для всех $\varepsilon \geq 0$ выполняется

$$|f_i(v, w', \varepsilon)| \leq q_1 + \varepsilon q_2, \quad i = 0, 1,$$

для всех подходящих v, w', совпадают с множеством K.

Свойство 2.2. $Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}}) = K \cap Q_2 \cap Q_3$.

Доказательство. Пусть, например, $Box_{E_{\alpha,\beta}}(O, w) = |f_3(v, w', \varepsilon)|^{\frac{1}{3}}$, тогда $(q_1, q_2) \in Q_3$, см. (2.3), но так как

$$|f_3|^{\frac{1}{3}} = \max\left\{|f_0|,\ |f_1|,\ |f_2|^{\frac{1}{2}},\ |f_3|^{\frac{1}{3}}\right\},$$

то $(q_1, q_2) \in Q_i$, $i = 0, 1, 2, \Rightarrow (q_1, q_2) \in K \cap Q_2 \cap Q_3$; следовательно,

$$Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}}) \subseteq K \cap Q_2 \cap Q_3.$$

Включение $K \cap Q_2 \cap Q_3 \subseteq Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$ следует из определения множества $K \cap Q_2 \cap Q_3$. $\square$

Свойство 2.3 ([5])**.** $Q_2 = Q(H^1_\alpha, Box_{H^1_\alpha})$.

Учитывая свойства 2.2, 2.3, для получения описания множества

$$Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}})$$

нам необходимо выяснить, как устроено множество Q_3. Отметим, что в работе [10] было установлено, что

$$\max_{v,w'} |f_3(v, w', \varepsilon)| = 1 + (\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6})\varepsilon + (\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6})\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

Тогда множество Q_3 совпадает с множеством, состоящим из точек (q_1, q_2) плоскости Π таких, что

$$1 + (\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6})\varepsilon + (\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6})\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \leq (q_1 + \varepsilon q_2)^3, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{2.4}$$

Используя (2.4), из теоремы 0.1 и свойств 2.2, 2.3 вытекает следующее

Свойство 2.4 ([5, 10]). 1^0 *Если* $\max\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{6}+\frac{\alpha\beta}{18}\right\} \le 1$, *то*

$$Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}}) = K.$$

2^0 *Если* $\alpha > 2$, $\frac{\beta}{6}+\frac{\alpha\beta}{18} \le 1$, *то* $Q(E_{\alpha,\beta}, Box_{E_{\alpha,\beta}}) = Q(H^1_\alpha, Box_{H^1_\alpha})$.

Исследуем множество Q_3 при условии $\frac{\beta}{6}+\frac{\alpha\beta}{18} > 1$. Для этого изучим множество ∂Q_3. По определению множество ∂Q_3 состоит из таких точек $(q_1, q_2) \in K$, что для любой пары $(q_1, q_2) \in \partial Q_3$ найдется число $\varepsilon_{q_1,q_2} \ge 0$ такое, что для него нестрогое неравенство (2.4) обращается в равенство, и при этом неравенство (2.4) сохраняется в некоторой окрестности точки $\varepsilon_{q_1,q_2} \in [0,\infty)$; с другой стороны, если для какого-то $\varepsilon' \in [0,\infty)$ нашлась пара $q_1', q_2' \ge 1$ такая, что при этих значениях неравенство (2.4) неравенство обратилось в равенство, и при этом неравенство (2.4) сохраняется в некоторой окрестности точки $\varepsilon' \in [0,\infty)$ то $(q_1', q_2') \in \partial Q_3$. Из результатов работы [10] вытекает, что множество ∂Q_3 представляет собой объединение дуги некоторой кривой $\sigma \subset K$ с концами в точках M'_{q_1}, M'_{q_2} и лучей, принадлежащих ∂K, начинающихся в точках M'_{q_1}, M'_{q_2}, где

$$M'_{q_1} = (1, \frac{a}{3}), \quad M'_{q_2} = (\frac{a}{3}, 1), \quad a = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6}.$$

Рассмотрим функцию

$$f_{q_1,q_2}(\varepsilon) = \varepsilon^3(q_2^3 - 1) + \varepsilon^2(3q_1q_2^2 - a) + \varepsilon(3q_1^2q_2 - a) + (q_1^3 - 1), \qquad (2.5)$$

для $1 < q_1, q_2 < \frac{a}{3}$, см. (2.4); это случай кривой σ без ее концов. При различных q_1, q_2 нас интересуют корни функции $f_{q_1,q_2}(\varepsilon)$, но при этом нас не интересуют отрицательные корни. Также нас не интересует ситуация, когда $f_{q_1,q_2}(0) = 0$. Пусть для некоторого $\varepsilon' > 0$ мы имеем $f_{q_1,q_2}(\varepsilon') = 0$, и при этом при переходе через ε' функция $f_{q_1,q_2}(\varepsilon)$ или меняет знак, или сохраняет знак «минус» в некоторой «проколотой» окрестности ε'; в этом случае из определения множества ∂Q_3 вытекает $\varepsilon' \ne \varepsilon_{q_1,q_2}$. Таким образом, корень ε_{q_1,q_2} имеет кратность 2; при этом в точке ε_{q_1,q_2} функция $f_{q_1,q_2}(\varepsilon)$ имеет локальный минимум. Заметим, что по формулам Виета произведение корней уравнения $f_{q_1,q_2}(\varepsilon) = 0$ равно $-\frac{q_1^3-1}{q_2^3-1}$, таким образом, оставшийся корень ε_0 уравнения $f_{q_1,q_2}(\varepsilon) = 0$ отрицательный. Таким образом, на полупрямой $[0,\infty)$ в точке ε_{q_1,q_2} функция $f_{q_1,q_2}(\varepsilon)$ имеет глобальный минимум. Так как ε_{q_1,q_2} — корень уравенения $f_{q_1,q_2}(\varepsilon) = 0$ кратности 2 , то ε_{q_1,q_2} — корень уравенения $f'_{q_1,q_2}(\varepsilon) = 0$; используя данный факт, найдем для ε_{q_1,q_2} его выражение. Рассмотрим уравнение

$$f'_{q_1,q_2}(\varepsilon) = 3(q_2^3 - 1)\varepsilon^2 + 2(3q_1q_2^2 - a)\varepsilon + (3q_1^2q_2 - a) = 0. \qquad (2.6)$$

Корни $\varepsilon_{1,2}$ уравнения (2.6) имеют вид

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-2(3q_1q_2^2 - a) \pm \sqrt{D}}{6(q_2^3 - 1)},$$

где

$$D = 4(3q_1q_2^2 - a)^2 - 12(q_2^3 - 1)(3q_1^2q_2 - a).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{q_1,q_2} = \frac{-2(3q_1q_2^2 - a) + \sqrt{D}}{6(q_2^3 - 1)}. \tag{2.7}$$

Теперь, для того, чтобы получить информацию о множестве σ, нам следует рассмотреть уравнение $f_{q_1,q_2}(\varepsilon_{q_1,q_2}) = 0$, где ε_{q_1,q_2} из (2.7), относительно подходящих q_1, q_2. Однако такой путь приводит к достаточно громоздкому выражению. Здесь можно несколько упростить рассмотрения. Используя формулы Виета, мы имеем

$$2\varepsilon_{q_1,q_2} + \varepsilon_0 = \frac{a - 3q_1q_2^2}{q_2^3 - 1} \Rightarrow_{(2.7)} \varepsilon_0 = \frac{a - 3q_1q_2^2 - \sqrt{D}}{3(q_2^3 - 1)}, \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_{q_1,q_2}^2\varepsilon_0 = \frac{1 - q_1^3}{q_2^3 - 1}. \tag{2.9}$$

Используя (2.7)–(2.9), мы получаем следующее тождество

$$\left(4(a - 3q_1q_2^2)^3 - 3D(a - 3q_1q_2^2) + 108(q_1^3 - 1)(q_2^3 - 1)^2\right)^2 = D^3, \tag{2.10}$$

связывающее координаты (q_1, q_2) кривой σ. Рассмотрим поведение кривой σ в точках M'_{q_1}, M'_{q_2}.

Подставляя координаты точки M'_{q_1} в (2.5), мы получаем

$$f_{1,\frac{a}{3}}(\varepsilon) = \varepsilon^3\big((\frac{a}{3})^3 - 1\big) + \varepsilon^2(\frac{a^2}{3} - a).$$

Таким образом, $\varepsilon_{1,\frac{a}{3}} = 0$. Несложно проверить, что координаты точки M'_{q_1} удовлетворяют уравнению (2.10). Отметим, что точка M'_{q_1} как экстремальная точка в задаче о нахождении точного значения константы q_2 для $(1, q_2)$-обобщенного неравенства треугольника для $Box_{E_{\alpha,\beta}}$ была найдена в работе [10].

Подставляя координаты точки M'_{q_2} в (2.5), мы получаем выражение

$$f_{\frac{a}{3},1}(\varepsilon) = \varepsilon(\frac{a^2}{3} - a) + \big((\frac{a}{3})^3 - 1\big).$$

Так как $a > 3$, то $f_{\frac{a}{3},1} > 0$ для всех $\varepsilon \geq 0$. (В некотором смысле, это «вырожденный случай».) Несложно проверить, что координаты точки M'_{q_2} удовлетворяют уравнению (2.10).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.5. *Пусть* $a = \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha\beta}{18} > 1$. *Тогда множество* ∂Q_3 *представляет собой объединение дуги кривой* σ *с концами в точках* M'_{q_1}, M'_{q_2}, *координаты которой удовлетворяют уравнению*

$$\begin{cases} \left(4(a-3q_1q_2^2)^3 - 3D(a-3q_1q_2^2) + 108(q_1^3-1)(q_2^3-1)^2\right)^2 = D^3, \\ D = 4(3q_1q_2^2-a)^2 - 12(q_2^3-1)(3q_1^2q_2-a), \end{cases} \tag{2.11}$$

и лучей, принадлежащих множеству ∂K, *начинающихся в точках* $M'_{q_1} = (1, \frac{a}{3})$, $M'_{q_2} = (\frac{a}{3}, 1)$.

В качестве применения полученных результатов, покажем, как находится минимальное значение q для (q,q)-обобщенного неравенства треугольника для $Box_{E_{\alpha,\beta}}$.

Теорема 2.6. *Минимальная константа* q *для* (q,q)*-обобщенного неравенства треугольника для* $Box_{E_{\alpha,\beta}}$ *определяется как*

$$q = \begin{cases} \max\{\frac{\sqrt{2+\alpha}}{2}, b\}, & \max\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha\beta}{18} > 1\}, \\ 1, & \max\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha\beta}{18} \leq 1\}, \end{cases}$$

где b *— корень уравнения* $q^3 + 3q^2 = 1 + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6}$ *на интервале* $(1, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим, см. (2.5), уравнение

$$\begin{aligned} f_{q,q}(\varepsilon) = (q^3-1)\varepsilon^3 + (3q^2-a)\varepsilon^2 + (3q^2-a)\varepsilon + (q^3-1) = 0 \\ \Leftrightarrow (a-3q^2)\varepsilon = (1-\varepsilon+\varepsilon^2)(q^3-1) \\ \Leftrightarrow (q^3-1)\varepsilon^2 + (-q^3+3q^2-a+1)\varepsilon + (q^3-1) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) должно иметь единственный положительный корень кратности 2, таким образом, должно выполняться равенство

$$(-3q^3 + q^2 - a + 3)(q^3 + 3q^2 - a - 1) = 0. \tag{2.13}$$

Отметим, что при $a \leq 3q^2$ у уравнения (2.12) не может быть решений при $q > 1$. Тогда из (2.13) мы получаем, что значение параметра q определяется из уравнения $q^3 + 3q^2 = 1 + a$. Учитывая следствие 5 из работы [5], теорема 2.6 доказана.

$\square$

Список литературы

1. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.,* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2018. Т. 82, № 2. С. 3–32.

2. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.,* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // *Докл. РАН.* 2016. Т. 469, № 5. С. 527–531.

3. *Arutyunov A. V., Greshnov A. V.,* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // *Fixed Point Theory.* 2022. V. 23. P. 473-486.

4. *Wilson W. A.,* On quasi-metric spaces // *American J. of Math.* 1931. V. 53. P. 675–684.

5. *Грешнов А. В., Грешнова С. А.,* Области допустимых параметров Box-квазиметрик канонических групп Гейзенберга и их обобщений // *Матем. тр.* 2024. Т. 27, № 4. С. 42–56.

6. *Грешнов А. В.,* (q_1, q_2)-Квазиметрики, билипшицево эквивалентные 1-квазиметрикам // Матем. тр. 2017. Т. 27, № 4. С. 253–262.

7. *Грешнов А. В.,* Метрики равномерно регулярных пространств Карно—Каратеодори и их касательных конусов // *Сиб. матем. журн.* 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.

8. *Vodopyanov S.K.,* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaes and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematis.* V. 424. Providence, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

9. *Karmanova M., Vodop'yanov S.,* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // *Analysis and Mathematical Physics.* (Trends Math.) Basel: Birkhauser, 2009. P. 233–335.

10. Грешнов А. В., Трямкин М. В., Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$-квазиметрик на канонических группах Карно // *Матем. заметки.* 2015. Т. 98, № 4. С. 635–639.

11. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.,* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // *Acta Math.* 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 50-61
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 50-61

12. *Постников М. М.,* Лекции по геометрии. Семестр V: Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

References

1. *Arutyunov A. V. and A. V. Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // *Izvestiya: Mathematics.* 2018. V. 82, N 2. P. 245–272.

2. *Arutyunov A. V. and A. V. Greshnov A. V.* Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points // *Dokl. Math.* 2016. V. 94. P. 434-437.

3. *Arutyunov A. V. and Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // *Fixed Point Theory.* 2022. V. 23. P. 473-486.

4. *Wilson W. A.* On quasi-metric spaces // *American J. of Math.* 1931. V. 53. P. 675–684.

5. *Greshnov A. V., Greshnova S. A.* The domains of admissible parameters of Box-quasimetrics of canonical Heisenberg groups and their generalizations // *Mat. Tr.* 2024. V. 27, N 4. P. 42–56.

6. *Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics // *Siberian Adv. Math.* 2017. V. 27. P. 253–262.

7. *Greshnov A. V.* Metrics and tangent cones of uniformly regular Carnot–Carathéodory spaces // *Siberian Math. Jour.* 2006. V. 47, N 2. P. 209–238.

8. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaes and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematis.* V. 424. Providence, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

9. *Karmanova M. and Vodop'yanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // *Analysis and Mathematical Physics.* (*Trends Math.*) Basel: Birkhauser, 2009. P. 233–335.

10. *Greshnov A. V., Tryamkin M. V.* Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical Carnot groups //*Math. Notes.* 2015. V. 98, N 4. P. 694–698.

11. *Nagel A., Stein E. M. and Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // *Acta Math.* 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 50-61
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 50-61

12. *Postnikov M. M. Lectures in Geometry. Semester V: Lie Groups and Lie Algebras*. Moscow: Mir, 1982.

Информация об авторах

Александр Валерьевич Грешнов, доктор физико-математических наук, доцент

SPIN 6093-9948 AuthorID: 14988

Scopus Author ID 6506409279

Софья Александровна Грешнова, студентка

Author Information

Alexander V. Greshnov, Doctor of Mathematics, Associate Professor

SPIN 6093-9948 AuthorID: 14988

Scopus Author ID 6506409279

Sofiya A. Greshnova, Student

Статья поступила в редакцию 04.03.2025;
одобрена после рецензирования 02.04.2025; принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 04.03.2025;
approved after reviewing 02.04.2025; accepted for publication 11.06.2025